Theodor-Körner-Schule

Keilstr. 42-48

44879 Bochum

Facharbeit

im Grundkurs Mathematik

Jahrgangsstufe Q1

2018/2019

Betreuende Lehrkraft: Frau Pisarevcher

Mathematik und Kunst

Johanna Emelie Heger

15.03.2019

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis 2
1. Einleitung 3
2. „Was gibt es Mathematisches in der Kunst?“ 4
2.1 Der Goldene Schnitt und die Fibonacci-Folge 4
2.2 Der Goldene Schnitt in Gemälden da Vincis 6
2.3 Die Perspektive 7
2.3.1 Die Zentralperspektive 7
2.3.2 Die Ein-Punkt-Perspektive 8
2.3.3 Die Eckperspektive 8
2.3.4 Die Frosch- und Vogelperspektive 8
3. „Worin besteht die Kunst, vielleicht sogar die höchste Kunst, in der Mathematik?“ - „Was macht Mathematik schön?“ 8
3.1 Die Geschichte der Mathematik 9
3.2 Die Kreativität und Genialität der Mathematik 9
3.3 Die Eleganz der Mathematik 10
3.4 Die Faszination der Mathematik 11
3.5 Stufen der Schönheit in der Mathematik 12
4. Fazit 13
Literaturverzeichnis 15
Abbildungsverzeichnis 15
Anhang 16
Selbstständigkeitserklärung 19

1. Einleitung

„Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist in dieser Welt kein Platz“ – *G. H. Hardy*

Fragt man einen Schüler nach Gemeinsamkeiten zwischen den Fächern Mathematik und Kunst, so wäre er vermutlich schon über die Frage irritiert. Die Mehrheit der Menschen betrachtet diese beiden Fächer als zwei völlig unterschiedliche Fachdisziplinen, die keinerlei gemeinsame Schnittmengen haben; als zwei verschiedene Paar Schuhe.

Widmet man den Überlegungen zu dieser Frage aber etwas mehr Zeit, so erscheint sie deutlich weniger sinnlos, im Gegenteil, sie ist überaus angebracht. Ich jedenfalls, ein Mensch, der sowohl kunst- als auch mathematikinteressiert ist, empfinde sie als interessant und einer ausführlicheren Auseinandersetzung mit ihr würdig, weshalb diese vorliegende Facharbeit der Frage nach Gemeinsamkeiten, in unterschiedlicher Konkretisierung, nachgeht:

1. „Was gibt es Mathematisches in der Kunst?“
   und
2. „Worin besteht die Kunst, vielleicht sogar die höchste Kunst, in der Mathematik?“
   bzw.
   „Was macht Mathematik schön?“

Folglich unterteilt sich diese Arbeit in zwei Kapitel mit diversen Unterthemen.

Das erste Kapitel befasst sich mit der ersten der soeben genannten Fragen, der Frage nach der verborgenen Mathematik in der Kunst. Hierzu werden zunächst mathematische Prinzipien und Theorien wie die „Perspektive“, die „Fibonacci-Folge“ sowie der „Goldene Schnitt“ skizziert. Anschließend an jede der Theorien folgt eine Darstellung des Erklärten anhand ausgewählter bildnerischer Kunstwerke des bekannten Künstlers Leonardo da Vinci, sowie eigene Verbildlichungen.

Die an zweiter Stelle genannten Fragen werden im zweiten Kapitel der Arbeit beantwortet. Die Unterthemen dieses Kapitels befassen sich mit Kriterien, wie beispielsweise Kreativität oder Eleganz, anhand denen ermittelt wird, wann und inwiefern Mathematik als schön gelten kann.

Im begrenzten Rahmen dieser Facharbeit ist es nicht möglich der Vielzahl der mathematischen Prinzipien und Theorien und deren Umfang gerecht zu werden, weshalb sich das erste Kapitel lediglich auf einzelne Aspekte ausgewählter Theorien beschränken wird. Diese Arbeit kann somit nicht als vollständige Analyse des Mathematischen in der Kunst angesehen werden, zumal mathematische Gesetzmäßigkeiten in anderen Kunstformen, wie beispielsweise Musik oder Plastiken nicht betrachtet werden. Der Fokus liegt hierbei also rein auf der bildnerischen Kunst.

2. „Was gibt es Mathematisches in der Kunst?“

Eines der berühmtesten Gemälde aller Zeiten ist wohl Leonardo da Vincis Mona Lisa. Generationen über Generationen zerbrachen und zerbrechen sich den Kopf über das Geheimnis ihres Lächelns und ihrer Schönheit, aber wohl die wenigsten der Besucher des Louvre, die sich das Werk ansehen, würden versuchen, sich dieser Thematik auf mathematische Weise anzunähern. Einen solchen Zugang zu finden wäre jedoch in der Tat sinnvoll, denn in da Vincis Meisterwerk verbirgt sich der *Goldene Schnitt*.

2.1 Der Goldene Schnitt und die Fibonacci-Folge

Bei dem Goldenen Schnitt handelt es sich um eine Zahl, nur etwas größer als 1, die endlos viele, sich niemals im gleichen Muster wiederholende, Nachkommastellen hat; sie ist also irrational. Das mathematische Symbol für den Goldenen Schnitt ist der griechische Buchstabe Phi (Φ).

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398$ ...

Das erste Mal fand der Goldene Schnitt Erwähnung in Euklids Buch *Die Elemente* um 300 v.Chr.[1] Er beschreibt den Goldenen Schnitt wie folgt:

„Eine gerade Strecke ist im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt, wenn das Verhältnis der ganzen Strecke zum größeren Teil dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil entspricht.“ Hat man also eine Strecke der Länge x und nennt den größeren Teil 1, so beträgt der kleinere Teil x-1.

Es gilt: $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$. „Sind beide Brüche gleich, müssen auch ihre entgegengesetzten Produkte gleich sein“[2]: $x \times (x-1) = 1 \times 1 \leftrightarrow\ x^2 - x = 1$, also $x^2 - x - 1 = 0$. Nun gibt es, mittels pq-Formel, zwei Lösungen für diese Gleichung, wobei nur die Positive von Bedeutung ist, weil Strecken nicht negativ sein können: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ \rightarrow \Phi \approx 1.618$.[3]

Es gibt viele weitere manuelle Berechnungsweisen um Phi näherungsweise zu bestimmen, so zum Beispiel durch Kettenbrüche oder mehrfaches Potenzieren von Phi, allerdings führen diese zu den jeweils gleichen Ergebnissen und sind heute aufgrund moderner Computer weniger von Bedeutung.[4]

Eine Berechnungsmöglichkeit, die auch heute noch von Aktualität ist, ist die *Fibonacci-Folge*. Entdeckt wurde sie von Leonardo Pisano (1175-1250), bekannt als Fibonacci. In seinem Buch Liber Abaci (=„Buch des Abakus“) taucht die Folge als Lösung der Kaninchen-Aufgabe, des bekanntesten Kapitels des Buches, auf. Die Fragestellung der Aufgabe lautet

[1] vgl. Corbalán, 2010, Seite 9
[2] Corbalán, 2010, Seite 23
[3] vgl. Museumsstiftung Post und Telekommunikation, 2016, Seite 56
[4] vgl. Corbalán, 2010, Seite 25 - 31

wie folgt: „Wie viele Kaninchenpaare können innerhalb eines Jahres aus einem Paar entstehen, wenn jedes Paar ab dem zweiten Lebensmonat jeden Monat ein weiteres Paar hervorbringt?“. Dabei berechnete Fibonacci das Wachstum seiner Kaninchenpopulation und gliederte es tabellarisch. Das Ergebnis der Gesamtzahl der Kaninchenpaare in jedem Monat entsprach jeweils der Summe der beiden vorhergehenden Zahlen.[5]

Mathematisch geschrieben sieht die Folge wie folgt aus: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ mit den Anfangswerten $f_1 = f_2 = 1$, wobei n ≥ 3 sein muss.[6]

Die ersten 12 Zahlen der Fibonacci-Folge lauten folglich: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144.

Der Bezug zum Goldenen Schnitt wird unter anderem deutlich, wenn man jede Fibonacci-Zahl durch ihre Vorhergehende berechnet, also $f_n \div f_{n-1}$:

Fibonacci-Zahl	$f_n \div f_{n-1}$	Abweichung von Φ
1		
1	1,00000…	-0,61803…
2	2,00000…	+0,38196…
3	1,50000…	-0,11803…
5	1,66666…	+0,04863…
8	1,60000…	-0,01803…
13	1,62500…	+0,00696…
21	1,61538…	-0,00264…
34	1,61904…	+0,00101…
55	1,61764…	-0,00038…
89	1,61818…	+0,00014…
144	1,61797…	-0,00005…

Abbildung 1: Fibonacci-Zahlen, vgl. Corbalán, 2010, Seite 35

Umso länger man diese Tabelle fortführen würde, desto näher würde man dem Goldenen Schnitt kommen. „Der Grenzwert der Quotienten der Fibonacci-Zahlen ist Φ.“[7]

In diesem Zusammenhang sei noch kurz angemerkt, dass der Goldene Schnitt und auch die Fibonacci-Folge nicht nur in der Kunst eine Rolle spielen, sondern gar als „die Lieblingszahl[en] der Natur“[8] gelten. So sind beispielsweise in einer Sonnenblumenblüte die Zahlen von rechts- und linksdrehenden Spiralen aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen[9].

Um auf die Mona Lisa, beziehungsweise die Kunst im Allgemeinen zurückzukommen: Das Streckenverhältnis des Goldenen Schnitts wird in Form unterschiedlicher Vielecke, besonders häufig sind Rechteck, Fünfeck und Pentagramm, oftmals in Gemälden verwendet.

[5] vgl. Corbalán, 2010, Seite 31 - 33
[6] Wikipedia, 2019, „Fibonacci-Folge“
[7] Corbalán, 2010, Seite 35
[8] Polster, 2004, Seite 46
[9] vgl. Polster, 2004, Seite 49

2.2 Der Goldene Schnitt in Gemälden da Vincis

Leonardo da Vinci (1452-1519), einer der bekanntesten Maler aller Zeiten, war ein vielseitig interessierter Mann und beschäftigte sich mit vielen Themengebieten, so auch der Mathematik. Dies legt den Gedanken nahe, da Vinci könne das Teilungsverhältnis des Goldenen Schnitts, anders als vermutlich viele andere Künstler, mit Absicht in seine Werke integriert haben.

Wie bereits erwähnt, ist da Vincis *Mona Lisa* eines seiner berühmtesten Werke und verbirgt, wie bei genauerer Analyse deutlich wird, eine Vielzahl Goldener Rechtecke in sich.

Aber auch die Zeichnung mit dem Titel *Vitruvianischer Mensch* bedient sich der Zahl Phi. Dies scheint nur allzu logisch, da es sich dabei sogar um eine Zeichnung über Proportionen handelt, bei welcher da Vinci sich an den Studien des Ingenieurs und Architekten Vitruv orientierte und diese verbildlichte.[10] Bei dem Vitruvianischen Menschen stehen der Kreisradius und die Quadratseite im Verhältnis des Goldenen Schnitts zueinander: $\frac{f}{h} = \frac{6,5}{4} = 1,625 \approx 1.618$.

Die folgenden Abbildungen zeigen die eben genannten Bilder da Vincis, welche mit Hilfe der Geometrie-Software Geogebra so bearbeitet wurden, dass die Maße des Goldenen Schnitts deutlich sichtbar werden. Dabei wurde folgendermaßen vorgegangen:

- Für jedes Rechteck oder Quadrat, das zu sehen ist, wurden (jederzeit verschiebbare) Punkte gesetzt, welche dann durch Strecken verbunden wurden. Dabei war zu beachten, dass die Punkte jeweils entweder die gleiche x- oder die gleich y-Koordinate haben mussten, je nachdem, ob die Strecken horizontal oder vertikal verlaufen.
- Anschließend war zu beachten, dass die Seiten eines jeden Rechtecks im Verhältnis 1:1,618 sein mussten, damit es sich um Goldene Rechtecke handelt. Deshalb war ein ständiges Überprüfen und Nachrechnen der Streckenverhältnisse nötig.
- Bei dem zweiten Gemälde da Vincis, der Zeichnung zu den menschlichen Proportionen, war es nötig, den Kreisradius zu bestimmen, weshalb man, durch das Setzen eines Kreismittelpunktes und eines auf dem Kreis liegenden Punktes, den Kreis einzeichnen musste.

Wichtige Anmerkungen: Bei beiden Bildern handelt es sich um leicht verzerrte digitale Versionen der Gemälde, weshalb es zu leichten Abweichungen gekommen ist; ein Beispiel: $\frac{j}{t} = \frac{0,77}{0,5} = 1,54 \neq 1.618$. Außerdem ist anzumerken, dass man in das Gesicht der Mona Lisa theoretisch noch weitere Rechtecke und Quadrate einfügen könnte. Dies macht hier allerdings auf Grund der, sich bei immer kleineren Vielecken immer deutlicher zeigenden Verzerrung, wenig Sinn.

[10] vgl. Corbalán, 2010, Seite 101

(Abbildung 2: Goldener Schnitt „Mona Lisa“, Wikipedia, 2019)

(Abbildung 3: Goldener Schnitt „Vitruvianischer Mensch“, Wikipedia, 2019)

2.3 Die Perspektive

Sehr beeindruckend an der bildnerischen, vor allem naturalistischen Kunst ist die Tatsache, dass der Künstler ein dreidimensionales Bild auf einer zweidimensionalen Fläche erstellt und der Betrachter wirklich ein Gefühl von Räumlichkeit und Weite vermittelt bekommt. Für diese Empfindung gibt es unterschiedliche Gründe, wie die Dicke der Linien, die Farbintensität und die Größe von Figuren, die voneinander abweicht. Ein weiterer, auf die Mathematik zurückzuführender, Grund nennt sich „Perspektive“ und basiert auf der Elementargeometrie nach Euklid. Erstmals wurde dies von dem berühmten Dichter Dante um 1300 beschrieben.[11]

Obwohl es unterschiedliche Formen von Perspektive gibt, unterscheiden diese sich kaum, da es sich immer um verschiedene Geraden handelt, die auf einen oder mehrere Fluchtpunkte zulaufen.[12]

Anhand der im Anhang zu findenden eigenständig von der Verfasserin erstellten Zeichnungen wird der Unterschied zwischen einer perspektivisch korrekten und die Regeln der Perspektive auf unterschiedliche Weise missachtenden Zeichnungen verdeutlicht.

2.3.1 Die Zentralperspektive

Ein Bild hat meist einen Horizont, also eine horizontal verlaufende Linie, die beispielsweise den Übergang von Erde zu Himmel markiert. Bei der Zentralperspektive verläuft diese Linie genau durch die Mitte des Bildes. Der Fluchtpunkt liegt mittig auf ihr, er befindet sich also genau im Zentrum des Bildes. „Der wiederum liegt gegenüber dem Augpunkt des Betrachters, sofern der Betrachter als frontal vor dem Bild stehend angenommen wird.“[13]Alle Linien des Werkes, laufen nun auf diesen Punkt zu.

Ist beispielsweise eine Straße mit Häusern auf beiden Seiten abgebildet, so werden die Begrenzungen der Häuser so ausgerichtet, dass sie auf den Fluchtpunkt zulaufen und man kann, ohne zu rechnen, bestimmen, wie viel kleiner das zweite Haus sein muss, um perspektivisch ins Bild zu passen.[14]

---

[11] vgl. Wolf, 2012, Seite 169 - 170
[12] vgl. Pareigis, 2007, Seite 5
[13] Wolf, 2012, Seite 171
[14] vgl. Pareigis, 2017, Seite 7 - 8

2.3.2 Die Ein-Punkt-Perspektive

Bei dieser Form der Perspektive gibt es kaum Abweichungen zur Zentralperspektive. Auch hier gibt es nur einen Fluchtpunkt, der auf der Horizontlinie liegt. Diese muss sich allerdings nicht mittig im Bild befinden und der Fluchtpunkt kann auf dieser Geraden beliebig verschoben werden. So kann er sich auch außerhalb des Bildes befinden, also mit bloßem Auge nicht direkt sichtbar sein.[15] Diese Perspektive wird im Anhang auf Seite 16 verbildlicht.

2.3.3 Die Eckperspektive

Ist auf einem Bild beispielsweise eine Häuserecke zu sehen, so müssen sich „die parallelen Geraden durch die horizontalen Kanten […] in zwei Fluchtpunkten auf dem Horizont treffen."[16] Das liegt daran, dass der weitere Verlauf des Hauses auf beiden Seiten kleiner werden muss, um ins räumliche Bild zu passen. Steht der Betrachter nun genau gegenüber der Hauskante auf dem Bild, erhält er den Eindruck tatsächlich vor einer solchen Häuserecke zu stehen.

2.3.4 Die Frosch- und Vogelperspektive

Bei diesen Perspektivenformen ist der Fluchtpunkt nicht an die Horizontlinie gebunden, da er entweder sehr weit oben oder sehr weit unten im Bild oder eben oberhalb oder unterhalb der Bildfläche liegt. Der Betrachter erhält so entweder den Eindruck ganz klein zu sein und zu dem im Gemälde Abgebildeten aufzublicken, oder aber sehr groß zu sein und auf das Abgebildete hinunterzublicken.

3. „Worin besteht die Kunst, vielleicht sogar die höchste Kunst, in der Mathematik?" - „Was macht Mathematik schön?"

Um die Schönheit der Mathematik beschreiben zu können, muss erst einmal verdeutlicht werden, wie genau die Begriffe *Schönheit* und *Mathematik* im folgenden Kapitel zu verstehen sind.

Die einzelnen Kriterien und Merkmale von Schönheit werden sich während des Kapitels von selbst definieren, allerdings ist dabei zu beachten, dass Schönheit stets subjektiv ist und dass es keine allgemeine, konkrete Definition dieser gibt. Es gibt lediglich bestimmte Eigenschaften, wie beispielsweise Symmetrie oder Eleganz, die von der Mehrheit der Menschen als schön oder ästhetisch angesehen werden.

Um den Begriff „Mathematik" definieren zu können, bedarf es eines stark verkürzten Rückblicks zum Ursprung der Mathematik.

---

[15] vgl. Pareigis, 2017, Seite 8
[16] Pareigis, 2017, Seite 8

3.1 Die Geschichte der Mathematik

Schon die Babylonier konnten mit Techniken, die heute als *sphärische Trigonometrie* bekannt sind, den Verlauf von Sternen berechnen und die Ägypter nutzten die heutige *elementare Geometrie* zum Vermessen von Feldern. Bei dieser Berechnungs- und Vermessungskunst handelte es sich aber lediglich um Schlussfolgerungen, die auf Erfahrungen basierten. Die entscheidende Wende zur Mathematik als Wissenschaft erfolgte erst durch die Griechen, da sie durch logisches Denken Beweise für ihre Annahmen fanden. Für die Südeuropäer stellte Mathematik den Ursprung aller Wissenschaft dar und galt als Abzweig der Philosophie, was Platons Überschrift „Kein Nichtmathematiker soll Eintritt haben!" über seiner berühmten Akademie verdeutlicht.

Im Folgenden ist also die Mathematik als *Wissenschaft des Geistes* und nicht als die Fähigkeit des Berechnens zu verstehen.[17]

3.2 Die Kreativität und Genialität der Mathematik

In der Gesellschaft gelten Künstler als die personifizierte Kreativität, wohingegen Mathematiker als „verkopft" und rational bekannt sind.

Dies ist allerdings äußerst realitätsfern, da Mathematik ohne kreative Ideen nicht existent wäre:

In der Mathematik geht es um das Lösen von Problemen unterschiedlicher Natur. Ob es sich dabei um das Verstehen des Weltalls und Voraussagen des Laufs seiner Gestirne, oder darum, wie schnell man fahren muss, um doch noch pünktlich bei der Arbeit zu sein, handelt, ist vorerst zweitrangig. Man stelle sich nun einen Menschen vor, der ein solches Problem hat. Des Weiteren nehmen wir an, dass sich vor ihm noch niemand sonst mit dieser Fragestellung befasst hat oder das vor ihm zumindest noch niemand diese zu lösen vermochte. Wie könnte dieser Mensch eine Lösung finden? – Er braucht Kreativität. Er muss intuitiv, schon bevor die Lösung existent ist, eine Idee davon haben, wie sie aussehen könnte. Er muss also über ein hohes Maß an Vorstellungskraft und Kreativität verfügen.

Nichts Anderes trifft auf einen Künstler zu, solange es sich dabei nicht um eine Tätigkeit wie beispielsweise die des Portraitierens handelt: Er sitzt vor einer leeren Leinwand wie der Mathematiker vor einem leeren Blatt. Er will etwas malen und muss sein fertiges Werk vor seinem „inneren Auge" sehen können, ohne, dass er es tatsächlich schon einmal gesehen hat, um sein Werk so zu gestalten, wie er es sich wünscht. So, wie der Mathematiker eine Vorstellung der Lösung hat, ohne sie vorher zu kennen.[18]

Es bedarf also *Kreativität*, um verschiedene Lösungswege erdenken und erschaffen zu können. Mathematik ist demnach *kreativ*.

---

[17] vgl. Hasse, 1952, Seite 5 - 9
[18] vgl. Hasse, 1952, Seite 12

Um aber eben diese oben genannten Aspekte der Kreativität erfüllen zu können, ist ein gewisses Maß an *Genialität* notwendig.

Mit Genialität sind hier intelligente Überlegungen gemeint, die durch Fleiß nicht zu erreichen sind, ebenso wenig, wie es Kreativität ist.[19]

Ein brillanter Mathematiker ist demnach im besten Fall sowohl *kreativ* als auch *genial*.

Ein Beispiel dafür ist der, hier nur verkürzt dargestellte, Beweis für die Annahme, dass es unendlich viele Primzahlen gibt:

Eine Primzahl ist eine Zahl, die nur durch sich selbst oder eins geteilt werden kann, ohne das ein Rest entsteht. Die Annahme, dass es unendlich viele dieser Zahlen geben mag, ist logisch, da man weiß, dass es unendlich viele Zahlen gibt. Den Beweis dafür lieferte Euklid durch das Widerlegen der Gegenhypothese. Er ging in seinen Ausführungen also zunächst davon aus, es gäbe endlich viele Primzahlen und sie wären der Größe nach geordnet. Er multiplizierte alle Primzahlen miteinander und addierte zum Schluss noch die Zahl eins, sodass man folgende Gleichung erhält: $x = (2*3*5*7*\ldots*p) +1$.

Nun wird deutlich, dass x nicht durch 2 geteilt werden kann, da sonst 1 durch 2 geteilt werden können müsste. Ebenso verhält es sich mit 3, 5, 7 und zum Schluss auch mit p. Es ergibt sich, dass x also durch keine dieser Primzahlen teilbar, aber gleichzeitig selber eine Primzahl ist, da x nur durch sich selbst und 1 teilbar ist. Weil x also eine Primzahl, aber nicht in der oben genannten Folge der Primzahlen enthalten ist, beinhaltet die Hypothese, es gäbe endlich viele Primzahlen einen Widerspruch und ist somit falsch.[20]

3.3 Die Eleganz der Mathematik

In der Mathematik als Wissenschaft geht es vor allem um Beweise. Diese sollten allgemein gehalten werden, da man somit einen Beweis für ein Phänomen in jeder möglichen Variante hat. Während man sich im Alltagsgeschehen oft an dem Motto „Das war bisher immer so, es wird auch dieses Mal so sein“ orientiert, strebt der Mathematiker nach zweifelsfreier Klarheit über alle potentiellen Szenarien. Trotz all der inhaltlichen Fülle, sind mathematische Formeln oftmals formal sehr schlicht. Sie sind geordnet aufgeschrieben und formatiert, wodurch sie übersichtlich werden. Sie sind auf das Wesentliche reduziert, schließlich bezeichnen sich Mathematiker oftmals nicht umsonst als faul, lassen aber dennoch auch nichts Wichtiges aus. Dadurch ist dem, der sich mit der Theorie befasst, zu jeder Zeit bewusst, worum es geht und an welchem Punkt der Rechnung er steht.

---

[19] vgl. Weth, 2007, Seite 86-7

[20] vgl. Weth, 2007, Seite 86-7 f.

Mathematik richtet sich nach dem Prinzip des Minimalismus, welcher von Vielen als *elegant*, oder eben *schön* betitelt wird. *Mathematische Eleganz* zeichnet sich also durch ihre *Zielstrebigkeit* aus.[21]

Ein Beispiel dafür, sind die Formeln für eine dreireihige Determinante:

(Abbildung 4: Dreireihige Determinante, Hasse, 1952, Seite 13)

Erklärung: „Der erste Index gibt jeweils die Nummer der Zeile, der zweite die der Spalte an, in der die betr. Größe in dem quadratischen Schema links steht. Und rechts sind die sechs auftretenden Tripelprodukte in sich und untereinander gesetzmäßig angeordnet, nämlich so, dass die ersten Indizes in jedem Tripel 1, 2, 3 lauten; die zweiten haben dann gerade alle sechs möglichen Anordnungen der drei Zahlen 1, 2, 3, wobei noch ein hier nicht zu diskutierendes Gesetz für die Vorzeichen hinzukommt.“[22]

3.4 Die Faszination der Mathematik

Viele künstlerische Werke haben eine tiefere Bedeutung oder eröffnen dem Betrachter neue Erfahrungswelten, lassen ihn über seinen eigenen Horizont hinausblicken, verblüffen und beschäftigen ihn.

So stellt beispielsweise Edvard Munchs Gemälde „Der Schrei“ gar nicht wirklich einen schreienden Mann dar, der bei Nacht auf einer Brücke steht, sondern soll in Wahrheit eine Angstattacke Munchs symbolisieren, die er bei einem nächtlichen Spaziergang erlitt, als er meinte, einen in der Ferne erklingenden Schrei zu vernehmen. Dies ist auf den ersten Blick aber für den Betrachter des Bildes nicht ersichtlich und erschließt sich ihm erst nach längerer Beschäftigung mit dem Werk, vielleicht aber ohne diese Hintergrundinformation nie wirklich.

Ob „der Schrei“ nun aber letztendlich korrekt verstanden wird, ist zunächst einmal zweitrangig, denn für viele Menschen, vor allem für die, die sich für Kunst interessieren, hat es eine fesselnde Wirkung, sie wollen es länger anschauen, verstehen und es versprüht eine Anziehungskraft. Das Gemälde ist folglich *faszinierend* oder bewirkt *Faszination* bei vielen seiner Betrachter.

Mathematik hat eine etwas andere Art von Faszination an sich, da es hier von elementarer Bedeutung ist, die mathematische Theorie zu verstehen. Diese kann sich je nach Theorie völlig anders äußern, so kann die anfängliche Problemstellung, die kreative Herangehensweise an eben diese oder auch ein unerwartetes Ergebnis faszinierend sein.

Ein Beispiel für die faszinierende Tragweite der Mathematik sind die Nachkommastellen der Zahl Pi:

[21] vgl. Hasse, 1952, Seite 12 – 13; vgl. Weth, 2007, Seite 86-2 f.
[22] Hasse, 1952, Seite 13

„Seit langem vermutet man von der Kreiszahl Pi (π) (= 3,141592...), dass sie „normal“ ist, was heißt, dass jede gleichlange endliche Zahlenkombination (etwa 7558 oder 1234) mit gleicher Wahrscheinlichkeit in den Nachkommastellen von Pi (π) auftritt.“[23]

Geht man davon aus, dass diese Vermutung korrekt ist, so heißt dies, dass beispielsweise das Geburtsdatum eines jeden von uns in den Nachkommastellen enthalten ist. Ist ein Geburtstag beispielsweise am 15.12.86, als Zahl also 151286, so ist dieser Tag in den Nachkommastellen enthalten, da die Wahrscheinlichkeit dafür genauso groß ist, wie die der ersten sechs Zahlen, welche sicher enthalten sind.

Auch jede Version eines beliebigen Bildes, zum Beispiel von da Vincis „Mona Lisa“, ist in den Nachkommastellen von Pi enthalten. Es benötigt einen gewissen Grad an Speicherplatz und wird durch eine lange, aber endliche Folge von Nullen und Einsen digitalisiert. Dies bedeutet, dass es mit Sicherheit in den Nachkommastellen der Kreiszahl enthalten ist.[24]

3.5 Stufen der Schönheit in der Mathematik

Sieht man sich in Museen Kunstwerke an, so sieht man nur das Endprodukt eines oftmals sehr langen Schaffensprozesses. All die Zwischenstufen, von der leeren Leinwand oder dem weißen Blatt Papier bis zu den weltbekannten Meisterwerken, sind so für den Betrachter nicht sichtbar. Häufig werden sogenannte „Roh-Werke“ sogar als hässlich und nur das fertige Bild als schön angesehen. Dabei sind eben diese vielen kleinen Zwischenschritte ebenso schön und als Kunst zu betrachten, wie das Bild, das letztendlich in Museen ausgestellt wird.

Schönheit hat Stufen und in allem kann Schönheit gefunden werden[25]:

So hat eine erste, unvollkommene Skizze, der erste Pinselstrich auf der Leinwand und jeder weitere kleine Fortschritt bis hin zum fertigen Gemälde seine ganz eigene, sich stufenweise steigernde Form von Schönheit.

Ebenso ist es in der Mathematik:

Die mathematische Schönheit beginnt im Kleinen schon mit dem Erkennen eines Problems, also der aufmerksamen Auseinandersetzung mit seiner Umwelt und dem Wahrnehmen von etwas, das vorher niemandem aufgefallen ist, was durchaus als Kunst betrachtet werden kann. Auch ein scheinbar simpler Lösungsansatz ist kunstvoll, da es kreativer Überlegungen bedarf, um diesen zu finden. Definitionen für sich sind ästhetisch, weil sie, im Optimalfall, klar und deutlich darstellen, wie etwas einzuordnen ist und so Übersicht und Struktur verleihen. Darauf aufbauend können Sätze und Hauptsätze gefunden werden,

[23] Weth, 2007, Seite 86-4
[24] vgl. Weth, 2007, Seite 4 - 5
[25] vgl. Hasse, 1952, Seite 12

welche mit dem darauffolgenden Beweis ebenfalls eine Kunst für sich sind, da auch sie strukturiert, man kann sagen elegant, niedergeschrieben sein sollten. Auch eine einzelne Schlussfolgerung kann schön sein, da sie das finale Ergebnis des mathematischen Prozesses zusammenfasst und, wie bereits im Unterthema *Faszination der Mathematik* erwähnt, Verblüffendes in sich birgt und so manche, vorher für wahr befundene, Grenzen verschiebt.

An oberster Stufe der mathematischen Schönheit steht eine gesamte Theorie. Ist diese in sich schlüssig, wie in den vorherigen Unterthemen beschrieben elegant, faszinierend, kreativ und birgt wahre Genialität in sich, so kann man sie mit einem harmonischen, in sich funktionierenden Organismus vergleichen – oder eben mit einem harmonischen, ästhetischen Gemälde.[26]

4. Fazit

Nun, nach längerer Auseinandersetzung mit der Thematik, ist mir deutlich bewusster geworden, wie weiträumig sowohl das Themenfeld Kunst, aber vor allem auch das Themenfeld Mathematik ist. Da ich schon immer großes Interesse für den und sehr viel Freude am Mathematikunterricht hatte, ist meine Begeisterung für diese Wissenschaft, durch die deutlich tiefere Auseinandersetzung mit ihr im Rahmen dieser Facharbeit, nochmals gesteigert worden. Mir wurden neue Perspektiven eröffnet und verdeutlicht, dass die Grenzen, die ich der Mathematik gesetzt hatte, nicht real, sondern nur meinem begrenzten Spektrum an Wissen geschuldet sind. Der Einfluss der Mathematik ist, salopp gesagt, gigantisch und weckt den Wunsch in mir, mich auch unabhängig von dieser Facharbeit mit ihm vertrauter zu machen. So empfinde ich beispielsweise auch das Wissen darum, dass der Goldene Schnitt und die Fibonacci-Folge richtungsweisend für die Natur sind, als äußerst faszinierend und möchte mich ausgiebiger mit dieser Wachstumsgeometrie beschäftigen.

Abschließend lässt sich sagen, dass Kunst und Mathematik zwar zwei unterschiedliche Fachdisziplinen sind, Überschneidungen und Schnittmengen aber mehr als deutlich werden, wenn man einen zweiten Blick wagt.

Bei genauerer Betrachtung von unterschiedlichsten Kunstwerken, sowohl aus verschiedenen Epochen als auch gemalt von verschiedensten Künstlern, werden verborgene mathematische Phänomene wie beispielsweise der Goldene Schnitt deutlich. Selbst etwas im Volksmund allseits bekanntes wie die Perspektive, welche eher dem Fach Kunst als dem Fach Mathematik zugeordnet wird, basiert auf der Elementargeometrie und ist also reine Mathematik.

[26] vgl. Hasse, 1952, Seite 12 - 16

Umgekehrt funktioniert dies aber genauso gut: Mathematik, ein Fach das oftmals als nüchtern, trocken, langweilig und verkopft beschrieben wird, ist in Wahrheit eine überaus kreative, elegante, faszinierende, kurz gesagt schöne Wissenschaft.

Um es mit G. H. Hardys Worten zu sagen: „Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz.“

Literaturverzeichnis

Corbalán, Fernando: Der Goldene Schnitt – Die Mathematische Sprache der Schönheit. Kerkdriel 2018

Geo Online Magazin: „Geo Epoche Magazin – Fünf Meisterwerke kurz erklärt – der Schrei“ https://www.geo.de/magazine/geo-epoche-edition/17571-bstr-fuenf-meisterwerke-kurz-erklaert/235700-img-der-schrei (13.03.2019)

Hasse, Helmut, 1952: „Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht“ archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/12971/1/Mathe.pdf (10.03.2019)

Museumsstiftung Post und Telekommunikation (Hrsg.): Göttlich Golden Genial – Weltformel Goldener Schnitt?. München 2016

Pareigis, Bodo, 2007: „Grundregeln der Perspektive und ihre elementargeometrische Herleitung“ www.mathematik.uni-muenchen.de/~pareigis/Papers/Perspektive.pdf (10.03.2019)

Polster, Burkhard, 2004: Schönheit der Mathematik. Mannheim 2011

Weth, Thomas: Die Schönheit der Mathematik. In: Ausgerechnet… Mathematik und Konkrete Kunst. Hrsg. von Institut für Mathematik der Universität Würzburg u.a. Würzburg 2007. S.68-72 (86 – 1-10)

Wikipedia, 17.02.2019: „Vitruvianischer Mensch“ https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Da_Vinci_Vitruve_Luc_Viatour.jpg (13.03.2019)

Wikipedia, 26.02.2019: „Mona Lisa“ https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mona_Lisa,_by_Leonardo_da_Vinci,_from_C2RMF_retouched.jpg (13.03.2019)

Wikipedia, 08.03.2019: „Fibonacci-Folge“ https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge (10.03.2019)

Wolf, Norbert (Hrsg.): Malerei verstehen. Darmstadt 2012

Abbildungsverzeichnis

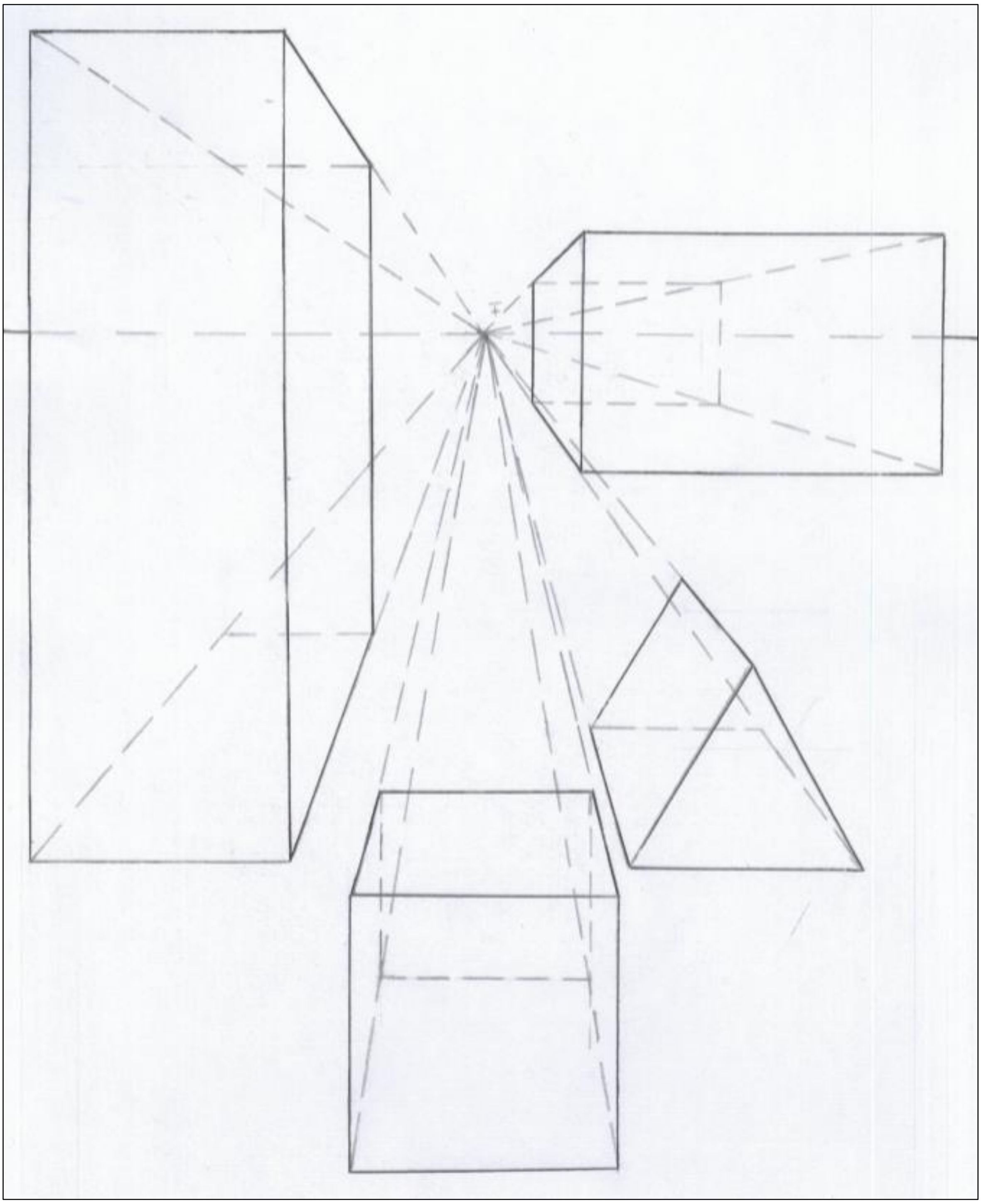
Abbildung 1: Fibonacci-Zahlen, Seite 5

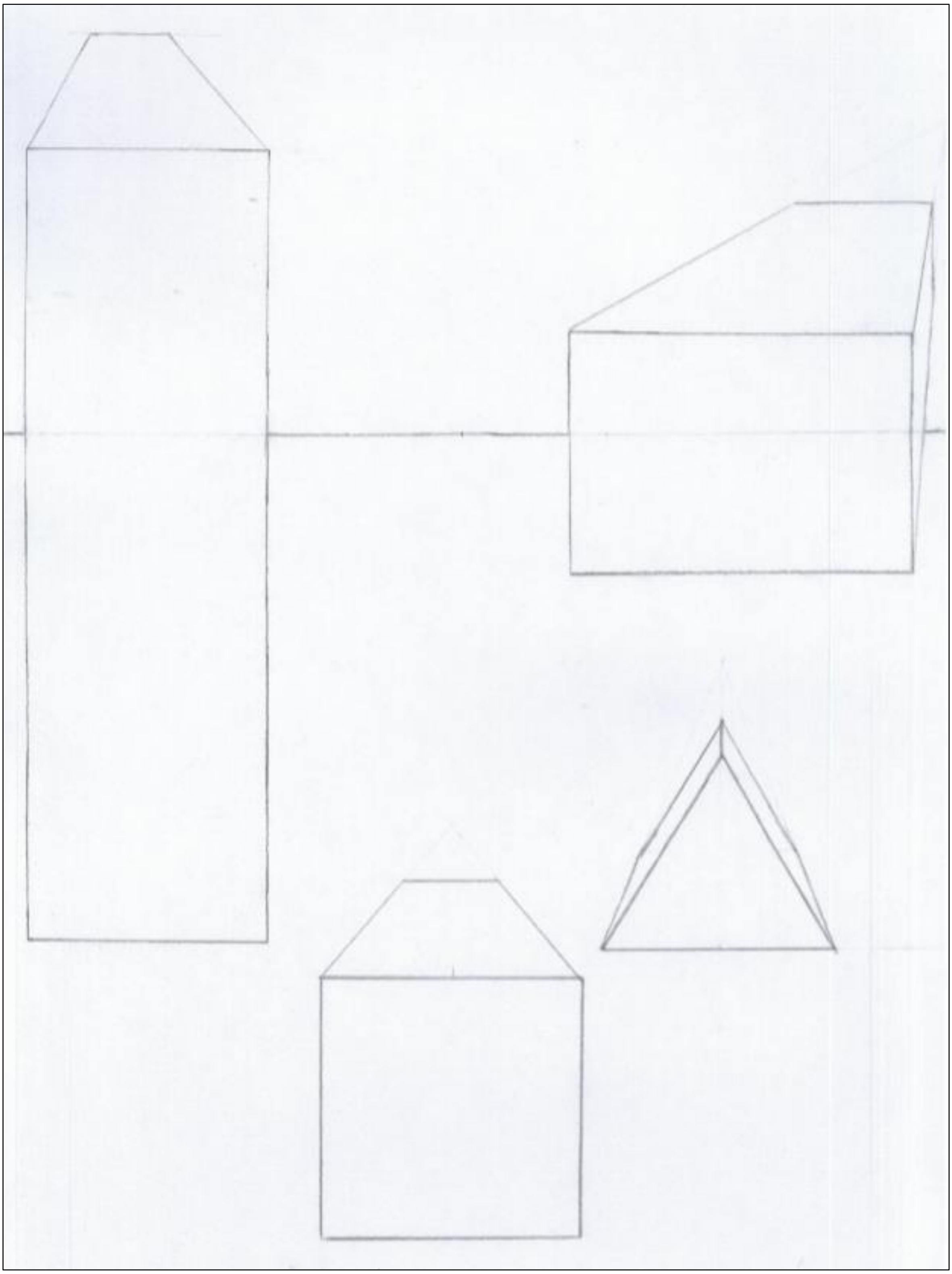
Abbildung 2: Goldener Schnitt „Mona Lisa“, Seite 7

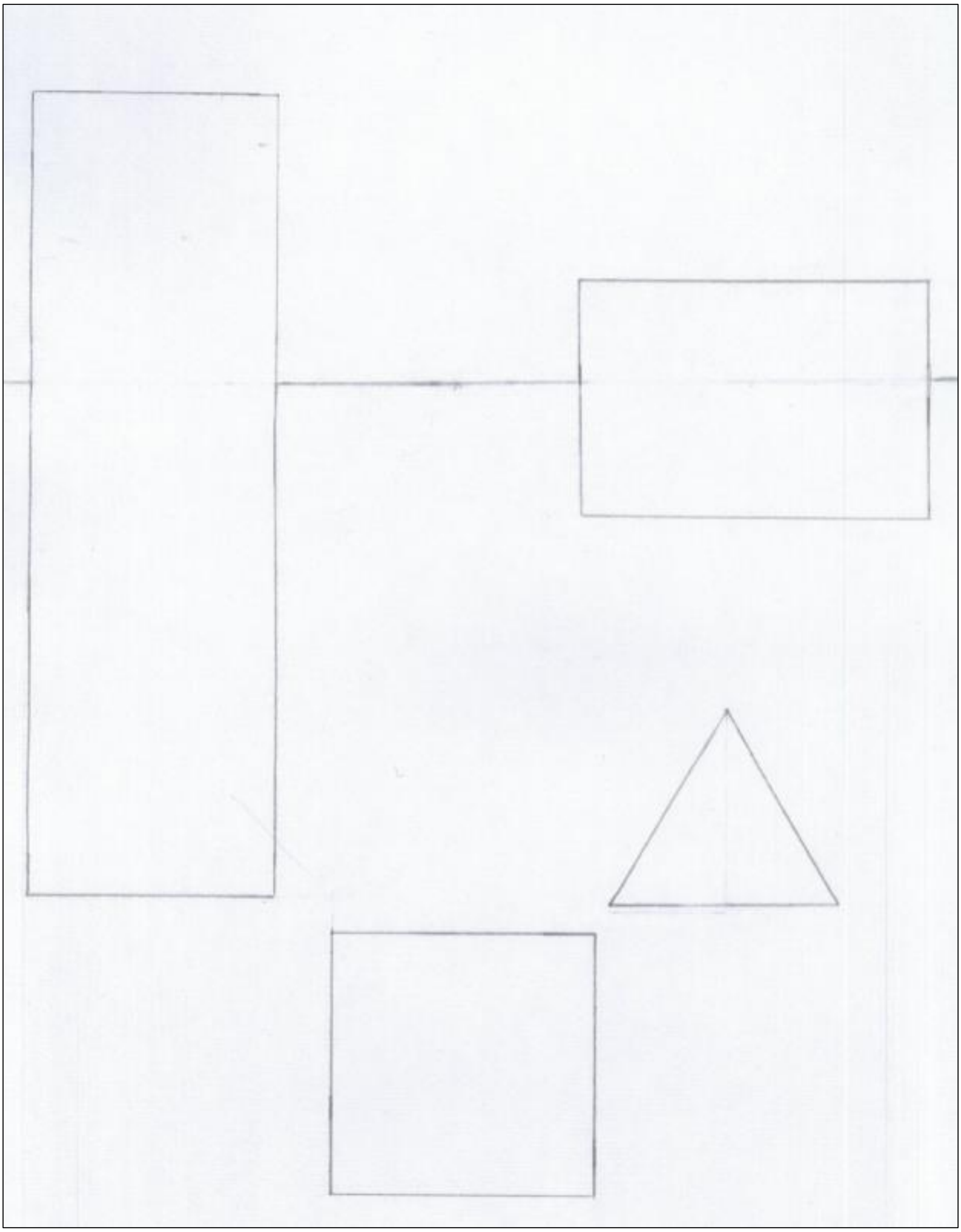
Abbildung 3: Goldener Schnitt „Vitruvianischer Mensch“, Seite 7

Abbildung 4: Dreireihige Determinante, Seite 11

Anhang







Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, in jedem einzelnen Fall unter der Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Das Gleiche gilt auch für beigegebene Zeichnungen, Bilder oder Darstellungen.

Bochum, den 15.03.2019